ВТОРАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТНЫМ СЛАГАЕМЫМ И С ИЗМЕРИМЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ КОМПЛЕКСНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ

Габил Ягуб

Натиг Ибрагимов

Низами Сулейманов

Кафказ университет, Карс, Турция

Лянкяранский государственный университет, Лянкярань, Азербайджан

Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан

э-почта: gabilya@mail.ru

э-почта: natiq_ibrahimov@mail.ru

Резюме. В данной работе рассматривается вторая начально-краевая задача для линейного одномерного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с измеримым ограниченным комплексным потенциалом, зависящим только от времени. При этом с помощью метода Галеркина доказывается теорема о существовании и единственности решения рассматриваемой второй начально-краевой задачи.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, градиентное слагаемое, комплексный потенциал, метод Галеркина.

1.Введение

Начально-краевые задачи для линейного и нелинейного нестационарного уравнения Шредингера часто возникают в квантовой механике, ядерной физике, нелинейной оптике и в других областях современной физики и техники и изучение этих задач носит как теоретические, так и практические интересы [4, 5, 13]. Начально-краевые задачи для линейного и нелинейного нестационарного уравнений без специального градиентного слагаемого ранее изучены, например, в работах [7, 8, 9, 10, 16, 17, 18] и др., а со специальным градиентным слагаемым, например, в работах [1, 6, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 25,] и др. Во всех этих работах от коэффициентов уравнения Шредингера, зависящих от временной переменной, потребовались дифференцируемость по временной переменной. Следует отметить, что начально-краевые задачи для нестационарного уравнения Шредингера без специального градиентного слагаемого, когда коэффициенты зависит только от временной переменной и являются измеримыми ограниченными функциями ранее изучены в работе [17]. Однако начально-краевые задачи для нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда потенциал является комплекснозначной измеримой ограниченной функцией, зависящим только от временной переменной почти не изучены. Поэтому изучение разрешимость второй начально-краевой задачи для линейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда вещественные и мнимые части комплексного потенциала являются измеримыми ограниченными функциями, зависящими только от временной переменной представляет немалый научный и практический интерес.

2. Постановка задачи

Пусть $l>0$, $T>0$ - заданные числа, $0\le x\le l$, $0\le t\le T, \Omega_t\equiv(0,l)\times(0,t), \Omega=\Omega_T$; $C^k([0,T],B)$- банахово пространство функций, k-раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,T]$ со значениями в банаховом пространстве B; $L_p(0,l)$-лебегово пространство функций, суммируемых по модулю на промежутке $(0,l)$ со степенью $p\ge 1$; $L_2(0,T;B)$– банахово пространство функций, определенных и суммируемых по модулю с квадратом на отрезке $[0,T]$ со значениями в банаховом пространстве B; $L_\infty(0,T;B)$–банахово пространство измеримых ограниченных на $(0,T)$ функций со значениями в банаховом пространстве B; Соболевы пространства $W_p^k(0,l), W_p^{k,m}(\Omega)$ $p\ge 1,\ k\ge 0,\ m\ge 0$, определены, например, в работах [11,12, 19].

Рассмотрим следующую вторую начально-краевую задачу об определении функции $\psi=\psi(x,t)$ из условий:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+ia_1(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}-a(x)\psi+v_0(t)\psi+iv_1(t)\psi=f(x,t),(x,t)\in\Omega, \qquad (2.1)$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x),\ x\in(0,l),$$

(2.2)

$$\frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\psi(l,t)}{\partial x}=0, t\in(0,T), \qquad (2.2)$$

где $i=\sqrt{-1}$; $a_0>0$- заданное число; $a(x),a_1(x,t),v_0(t),v_1(t)$- измеримые ограниченные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\mu_0\le a(x)\le\mu_1,\left|\frac{da(x)}{dx}\right|\le\mu_2,\left|\frac{d^2a(x)}{dx^2}\right|\le\mu_3,\ \overset{0}{\forall}x\in(0,l),\ \mu_0,\mu_1,\mu_2,\mu_3=const>0; \qquad (2.4)$$

$$|a_1(x,t)|\le\mu_4,\left|\frac{\partial a_1(x,t)}{\partial x}\right|\le\mu_5,\left|\frac{\partial^2 a_1(x,t)}{\partial x^2}\right|\le\mu_6,\overset{0}{\forall}(x,t)\in\Omega,$$

$$a_1(0,t)=a_1(l,t)=0,\mu_3,\mu_4,\mu_5,\mu_6=const>0; \qquad (2.5)$$

$$|v_s(t)|\le b_s, s=0,1,\overset{0}{\forall}t\in(0,T),b_0,b_1=const>0; \qquad (2.6)$$

$\varphi(x)$, $f(x,t)$- комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi \in W_2^2(0,l), \frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(l)}{dx} = 0\ ; \tag{2.7}$$

$$f \in W_2^{2,0}(\Omega), \frac{\partial f(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial f(l,t)}{\partial x} = 0, t \in (0,T); \tag{2.8}$$

Символ $\overset{0}{\forall}$ означает " при почти всех".

Определение 2.1. Под решением второй начально-краевой задачи (2.1)-(2.3) будем понимать функцию $\psi = \psi(x,t)$ из прстранства $W_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (2.1) для почти всех $(x,t) \in \Omega$, а начальному условию (2.2) для почти всех $x \in (0,l)$ и краевым условиям (2.3) для почти всех $t \in (0,T)$.

3. Разрешимость второй начально-краевой задачи.

В этом разделе используя метод Галеркина будем доказывать теорему о существовании и единственности решения рассматриваемой второй начально-краевой задачи.

Теорема 3.1. Пусть функции $a(x), a_1(x,t), v_0(t), v_1(t), \varphi(x)$, $f(x,t)$ удовлетворяют условиям (2.4)-(2.8). Тогда вторая начально-краевая задача (2.1)-(2.3) имеет единственное решение из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\psi\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega)} \le c_0 \left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{2,0}(\Omega)} \right), \tag{3.1}$$

где $c_0 > 0$ не зависит от φ, f .

Доказательство. Возьмем какую-либо фундаментальную в $W_2^2(0,l)$ и ортонормированную в $L_2(0,l)$ систему функций $u_k = u_k(x), k = 1, 2, \ldots$, например, систему собственных функций следующий спектральной задачи:

$$LX(x) = \lambda X(x), x \in (0,l), X'(0) = X'(l) = 0 \tag{3.2}$$

при $\lambda = \lambda_k$, $k = 1,2,\ldots$, где оператор L определяется формулой:

$$L = -a_0 \frac{d^2}{dx^2} + a(x). \tag{3.3}$$

Можем отметить, что спектральная задача (3.2) является спектральной задачей, изученной в работе [11]. Поэтому с помощью результатов этой работы можем утверждать, что спектральная задача (3.2) имеет нетривиальные решения $X = u_k(x)$, $k = 1,2,\ldots$ при $\lambda = \lambda_k$, $k = 1,2,\ldots$, образующих спектр задачи и эти решения образуют базис в пространствах $W_2^1(0,l), W_2^2(0,l)$, и справедливы условия ортонормированности в $L_2(0,l)$ и ортогональности в $W_2^1(0,l)$, $W_2^2(0,l)$ в виде:

$$(u_k, u_m)_{L_2(0,l)} = \int_0^l u_k(x) u_m(x) dx = \delta_k^m, \tag{3.4}$$

где δ_k^m символы Кронекера:

$$\delta_k^m = \begin{cases} 1, \ k = m, \\ 0, \ k \neq m, \ k, m = 1,2,... \end{cases} \tag{3.5}$$

Ясно, что функции $u_k(x), k = 1, 2,...$ ортогональны и в следующем смысле:

$$[u_k, u_m] == (Lu_k, u_m)_{L_2(0,l)} = \int_0^l \left(a_0 \frac{du_k}{dx} \frac{du_m}{dx} + a(x) u_k u_m \right) dx = \lambda_k \delta_k^m, \ k, m = 1, 2, ...; \tag{3.6}$$

$$\{u_k, u_m\} = (Lu_k, Lu_m)_{L_2(l)} = = \lambda_k^2 \delta_k^m, \ k, m = 1, 2, ... \tag{3.7}$$

В силу предположения $a(x) \geq \mu_0 > 0$ все собственные значения $\lambda = \lambda_k$, $k = 1,2,...$ вещественны, положительны и расположены в порядке возрастания:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_k \leq ..., \ \lambda_k \to \infty \text{ при } k \to \infty. \tag{3.8}$$

По методу Галеркина приближенное решение будем искать в виде:

$$\psi^N(x,t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) u_k(x), \tag{3.9}$$

где $c_k^N(t) = \left(\psi^N(\cdot,t), u_k\right)_{L_2(0,l)}$, $k = 1, 2, ..., N$ определяются из условий:

$$i \frac{d}{dt}\left(\psi^N(.,t), u_k\right)_{L_2(0,l)} - \left(L\psi^N(.,t), u_k\right)_{L_2(0,l)} + i\left(a_1(.,t) \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}, u_k \right)_{L_2(0,l)} +$$

$$+\left(v_0(t)\psi^N(.,t), u_k\right)_{L_2(0,l)} + i\left(v_1(t)\psi^N(.,t), u_k\right)_{L_2(0,l)} = f_k(t), \ k = 1,2,...,N, t \in [0,T], \tag{3.10}$$

$$c_k^N(0) = \left(\psi^N(\cdot,0), u_k\right)_{L_2(0,l)} = \varphi_k, \ k = 1, 2, ..., N. \tag{3.11}$$

Здесь $f_k(t) = \left(f(\cdot,t), u_k\right)_{L_2(0,l)}$, $\varphi_k = (\varphi, u_k)_{L_2(0,l)}$, $k = 1, 2, ..., N$. Система (3.10) есть нечто иное, как система N линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и с правой частью $f_k \in L_2(0,T)$. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что задача Коши (3.10), (3.11) имеет единственное обобщенное решение из пространства $W_2^1(0,T)$ (см: например,[2, 3,14,]).

Теперь установим оценку для решения этой задачи Коши.

Лемма 3.1. Для решения системы (3.10), (3.11) верна оценка:

$$\int_0^T \sum_{k=1}^N \left|c_k^N(t)\right|^2 dt + \int_0^T \sum_{k=1}^N \left|\frac{dc_k^N(t)}{dt}\right|^2 dt \le \left\|\psi^N\right\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega)} \le$$

$$\le c_0\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{2,0}(\Omega)}\right), t\in[0,T], N=1,2,\dots . \quad (3.12)$$

Доказательство леммы. Умножим каждое k-ое уравнение из (3.10) на свое $\bar{c}_k^N(t)$, полученные равенства просуммируем по k от 1 до N и проинтегрируем по t от нуля до $t\le T$. В результате, используя формулу интегрирования по частям и условию $\frac{du_k(0)}{dx} = \frac{du_k(l)}{dx} = 0,\ k=1,2,\dots$, имеем:

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\bar{\psi}^N - a_0\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2 + ia_1(x,\tau)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\bar{\psi}^N - a(x)\left|\psi^N\right|^2 + v_0(\tau)\left|\psi^N\right|^2 + iv_1(\tau)\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} f(x,\tau)\bar{\psi}^N(x,\tau)\,dxd\tau, \forall t\in[0,T]. \quad (3.13)$$

Из этого равенства вычитывая его комплексное сопряжение и в полученном равенстве используя дифференцируемость функций $a_1(x,t)$ получим справедливость равенства:

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,\tau)\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t}\frac{\partial a_1(x,\tau)}{\partial x}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau - 2\int_{\Omega_\tau} v_1(\tau)\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau + 2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(f\bar{\psi}^N\right)dxd\tau, \forall t\in[0,T]. \quad (3.14)$$

Ввиду того, что функция $a_1(x,t)$ удовлетворяют однородным граничным условиям $a_1(0,t) = a_1(l,t) = 0, t\in(0,T)$, второе слагаемое равняется нулю. С учетом этого и условий на коэффициенты уравнения из равенства (3.14) нетрудно получить справедливость неравенства:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le \left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)} + (\mu_5 + 2b_1 + 1)\int_0^t \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau, \forall t\in[0,T]. \quad (3.15)$$

Используя формулу (3.9) можем написать следующее соотношение:

$$\left\|\psi^N(\cdot,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} = \sum_{k=1}^N \left|c_k^N(0)\right|^2 \le \sum_{k=1}^\infty \left|\varphi_k\right|^2 = \|\varphi\|^2_{L_2(0,l)}. \quad (3.16)$$

С помощью этого соотношения из (3.15) получим справедливость неравенства:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le \|\varphi\|^2_{L_2(0,l)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)} + (\mu_5 + 2b_1 + 1)\int_0^t \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau, \forall t\in[0,T].$$

С помощью этого неравенства и леммы Гроноулла нетрудно получить справедливость оценки:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_2\left(\|\varphi\|^2_{L_2(0,l)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)}\right), \forall t\in[0,T]. \tag{3.17}$$

Теперь оценим $\frac{\partial\psi^N}{\partial x}$. С этой целью и умножим k-ое уравнение системы (3.10) на свое $\lambda_k\overline{c}_k^N(t)$, а потом полученные уравнения просуммируем по k от 1 до N. Тогда, полученное равенство проинтегрируя по интервалу $(0,t)$ имеем:

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial\psi^N}{\partial t}L\overline{\psi}^N - \left|L\psi^N\right|^2 + ia_1(x,\tau)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}L\overline{\psi}^N\right)dxd\tau +$$

$$+\int_{\Omega_t}\left(v_0(\tau)\psi^N L\overline{\psi}^N + iv_1(\tau)\psi^N L\overline{\psi}^N\right)dxd\tau = \int_{\Omega_t} f(x,\tau)L\overline{\psi}^N(x,\tau)dxd\tau, \forall t\in[0,T]. \tag{3.18}$$

Из этого равенства вычитывая его комплексное сопряжение, имеем:

$$\int_{\Omega_t}\left(i\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t}L\overline{\psi}^N + \frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}L\psi^N\right) + ia_1(x,\tau)\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x}L\overline{\psi}^N + \frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial x}L\psi^N\right)\right)dxd\tau +$$

$$+\int_{\Omega_t}\left(v_0(\tau)\left(\psi^N L\overline{\psi}^N - \overline{\psi}^N L\psi^N\right) + iv_1(\tau)\left(\psi^N L\overline{\psi}^N + \overline{\psi}^N L\psi^N\right)\right)dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t}\left(f(x,\tau)L\overline{\psi}^N(x,\tau) - \overline{f}(x,\tau)L\psi^N(x,\tau)\right)dxd\tau, \forall t\in[0,T]. \tag{3.19}$$

Используя формулу (3.3) для оператора L и формулу интегрирования по частям, а также граничные условия $\frac{du_k(0)}{dx} = \frac{du_k(l)}{dx} = 0$ имеем:

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\left(-a_0\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial x^2} + a(x)\overline{\psi}^N\right)\right)dxd\tau = \int_{\Omega_t} i\left(a_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t\partial x}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial x} + a(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N\right)dxd\tau, \tag{3.20}$$

$$\int_{\Omega_t} ia_1(x,\tau)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}L\overline{\psi}^N dxd\tau = \int_{\Omega_t}\left(ia_1(x,\tau)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\left(-a_0\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial x^2} + a(x)\overline{\psi}^N\right)\right)dxd\tau =$$

$$= -\int_{\Omega_t} ia_0a_1(x,\tau)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial x^2}dxd\tau + \int_{\Omega_t} ia(x)a_1(x,\tau)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\overline{\psi}^N dxd\tau, \tag{3.21}$$

$$\int_{\Omega_t}\left(v_0(\tau)\psi^N L\overline{\psi}^N + iv_1(\tau)\psi^N L\overline{\psi}^N\right)dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t}\left(v_0(\tau)\psi^N\left(-a_0\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial x^2} + a(x)\overline{\psi}^N\right) + iv_1(\tau)\psi^N\left(-a_0\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial x^2} + a(x)\overline{\psi}^N\right)\right)dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t}\left(a_0v_0(\tau)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2 + v_0(\tau)a(x)\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau +$$

$$+\int_{\Omega_t}\left(ia_0v_1(\tau)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2 + iv_1(\tau)a(x)\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau, \tag{3.22}$$

$$\int_{\Omega_t} f(x,\tau) L\bar{\psi}^N(x,\tau) dxd\tau = \int_{\Omega_t} f(x,\tau)\left(-a_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N(x,\tau)}{\partial x^2} + a(x)\bar{\psi}^N(x,\tau)\right) dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t}\left(a_0 \frac{\partial f(x,\tau)}{\partial x}\frac{\partial \bar{\psi}^N(x,\tau)}{\partial x} + a(x) f(x,\tau)\bar{\psi}^N(x,\tau)\right) dxd\tau, \forall t \in [0,T]. \quad (3.23)$$

С учетом этих равенств (3.20)-(3.23) из равенства (3.19) получим справедливость следующего равенства:

$$i\int_{\Omega_t} a_0\left(\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t\partial x}\frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial t\partial x}\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right) dxd\tau + i\int_{\Omega_t} a(x)\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\bar{\psi}^N + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t}\psi^N\right) dxd\tau -$$

$$-i\int_{\Omega_t} a_0 a_1(x,\tau)\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2}\right) dxd\tau + i\int_{\Omega_t} a(x) a_1(x,\tau)\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\bar{\psi}^N + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x}\psi^N\right) dxd\tau +$$

$$+2i\int_{\Omega_t}\left(a_0 v_1(\tau)\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right|^2 + v_1(\tau) a(x)\left|\psi^N\right|^2\right) dxd\tau = 2i\int_{\Omega_t} a_0 \operatorname{Im}\left(\frac{\partial f(x,\tau)}{\partial x}\frac{\partial \bar{\psi}^N(x,\tau)}{\partial x}\right) dxd\tau +$$

$$+2i\int_{\Omega_t} a(x) \operatorname{Im}\left(f(x,\tau)\bar{\psi}^N(x,\tau)\right) dxd\tau, \forall t \in [0,T]. \quad (3.24)$$

Отсюда нетрудно получить следующее равенство:

$$\int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t} a(x)\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau -$$

$$-\int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,\tau)\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right|^2\right) dxd\tau + \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial a_1(x,\tau)}{\partial x}\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right|^2 dxd\tau +$$

$$+\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x) a_1(x,\tau)\left|\psi^N\right|^2\right) dxd\tau - \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x) a_1(x,\tau)\right)\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau +$$

$$+2\int_{\Omega_t}\left(a_0 v_1(\tau)\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right|^2 + v_1(\tau) a(x)\left|\psi^N\right|^2\right) dxd\tau = 2\int_{\Omega_t} a_0 \operatorname{Im}\left(\frac{\partial f(x,\tau)}{\partial x}\frac{\partial \bar{\psi}^N(x,\tau)}{\partial x}\right) dxd\tau +$$

$$+2\int_{\Omega_t} a(x) \operatorname{Im}\left(f(x,\tau)\bar{\psi}^N(x,\tau)\right) dxd\tau, \forall t \in [0,T].$$

В силу условий $a_1(0,t) = a_1(l,t) = 0, t \in (0,T)$ третье и пятое слагаемые левой части этого равенства равняются нулю. С учетом этого и с помощью условий на коэффициенты уравнения, а также неравенства Коши-Буняковского из этого равенства нетрудно получить справедливость следующего неравенства:

$$a_0\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} + \mu_0\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le a_0\left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} + \mu_1\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} +$$

$$+a_0(\mu_5 + 2b_1 + 1)\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right|^2 dxd\tau + (\mu_2\mu_4 + \mu_1\mu_5 + 2\mu_1 b_1 + \mu_1)\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau +$$

$$+a_0\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial f(x,\tau)}{\partial x}\right|^2 dxd\tau+\mu_1\int_{\Omega_t}\left|f(x,\tau)\right|^2 dxd\tau,\forall t\in[0,T]. \qquad (3.25)$$

С помощью формулы (3.9) нетрудно установить справедливость неравенства:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_3\|\varphi\|^2_{W_2^1(0,l)}. \qquad (3.26)$$

В силу этого неравенства и соотношения (3.16), а также оценки (3.17) из неравенства (3.25) получим справедливость неравенства:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_4\left(\|\varphi\|^2_{W_2^1(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{1,0}(\Omega)}\right)+c_5\int_0^t\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau,\forall t\in[0,T]. \quad (3.27)$$

Отсюда с помощью леммы Гроноулла получим справедливость следующей оценки:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_6\left(\|\varphi\|^2_{W_2^1(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{1,0}(\Omega)}\right),\forall t\in[0,T]. \qquad (3.28)$$

Теперь оценим $\dfrac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}$. С этой целью и умножим k-ое уравнение системы (3.10) на свое $\lambda_k^2\bar{c}_k^N(t)$, а потом полученные уравнения просуммируем по k от 1 до N. Тогда, используя равенство $Lu_k=\lambda_k u_k$ с помощью формулы интегрирования по частям преобразуя каждый интеграл полученного равенства имеем следующее равенство:

$$i\sum_{k=1}^N\int_0^l\frac{\partial}{\partial t}\left(L\psi^N(x,t)\right)u_k(x)dx\lambda_k\bar{c}_k^N(t)-\sum_{k=1}^N\int_0^l L\left(L\psi^N(x,t)\right)u_k(x)dx\lambda_k\bar{c}_k^N(t)+$$

$$+i\sum_{k=1}^N\int_0^l L\left(a_1(x,t)\frac{\partial\psi^N(x,t)}{\partial x}\right)u_k(x)dx\lambda_k\bar{c}_k^N(t)+\sum_{k=1}^N\int_0^l v_0(t)L\psi^N(x,t)u_k(x)dx\lambda_k\bar{c}_k^N(t)+$$

$$+i\sum_{k=1}^N\int_0^l v_1(t)L\psi^N(x,t)u_k(x)dx\lambda_k\bar{c}_k^N(t)=\sum_{k=1}^N\int_0^l Lf(x,t)u_k(x)dx\lambda_k\bar{c}_k^N(t).$$

В этом равенстве опять используя равенство $Lu_k=\lambda_k u_k$ и формулу (3.9) после интегрирования по t от нуля до $t\le T$ получим справедливость равенства:

$$i\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(L\psi^N\right)L\bar{\psi}^N dxd\tau-\int_{\Omega_t}L\left(L\psi^N\right)L\bar{\psi}^N dxd\tau+i\int_{\Omega_t}L\left(a_1(x,\tau)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right)L\bar{\psi}^N dxd\tau+$$

$$+\int_{\Omega_t}v_0(\tau)\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau+i\int_{\Omega_t}v_1(\tau)\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau=\int_{\Omega_t}Lf(x,\tau)L\bar{\psi}^N(x,\tau)dxd\tau,\forall t\in[0,T]. \quad (3.29)$$

Теперь в этом равенстве преобразуем второе и третье слагаемые левой части. С помощью формулы:

$$L\left(L\psi^N\right)=-a_0\frac{\partial}{\partial x^2}\left(L\psi^N\right)+a(x)L\psi^N \qquad (3.30)$$

и формулы интегрирования по частям можем написать следующее равенство:

$$\int_{\Omega_t} L\left(L\psi^N\right)L\overline{\psi}^N dxd\tau = \int_{\Omega_t} a_0 \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(L\psi^N\right)\right|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t} a(x)\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau, \forall t \in [0,T]. \qquad (3.31)$$

Для преобразования третьего слагаемого левой части равенства (3.29) сначала преобразуем под интегральное выражение $L\left(a_1(x,t)\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right)$. С помощью формулы оператора L имеем:

$$L\left(a_1(x,t)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right) = -a_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a_1(x,t)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right) + a(x)a_1(x,t)\frac{\partial\psi^N}{\partial x} = -a_0\frac{\partial^2 a_1(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial\psi^N}{\partial x} -$$

$$-2a(x)\frac{\partial a_1(x,t)}{\partial x}\psi^N - a_1(x,t)\frac{da(x)}{dx}\psi^N + 2\frac{\partial a_1(x,t)}{\partial x}L\psi^N + a_1(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(L\psi^N\right). \qquad (3.32)$$

Тогда с помощью формул (3.31) и (3.32) равенство (3.29) можем написать в виде:

$$i\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(L\psi^N\right)L\overline{\psi}^N dxd\tau - \int_{\Omega_t} a_0\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(L\psi^N\right)\right|^2 dxd\tau - \int_{\Omega_t} a(x)\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau -$$

$$-i\int_{\Omega_t} a_0\frac{\partial^2 a_1(x,\tau)}{\partial x^2}\frac{\partial\psi^N}{\partial x}L\overline{\psi}^N dxd\tau - i\int_{\Omega_t}\left(2a(x)\frac{\partial a_1(x,t)}{\partial x} + a_1(x,t)\frac{da(x)}{dx}\right)\psi^N L\overline{\psi}^N dxd\tau +$$

$$+i\int_{\Omega_t} 2\frac{\partial a_1(x,\tau)}{\partial x}\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau + i\int_{\Omega_t} a_1(x,\tau)\frac{\partial}{\partial x}\left(L\psi^N\right)L\overline{\psi}^N dxd\tau +$$

$$+\int_{\Omega_t} v_0(\tau)\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau + i\int_{\Omega_t} v_1(\tau)\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau = \int_{\Omega_t} Lf(x,\tau)L\overline{\psi}^N(x,\tau)dxd\tau, \forall t \in [0,T]. \; (3.33)$$

Вычитывая из этого равенства его комплексное сопряжение имеем:

$$i\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(L\psi^N\right)L\overline{\psi}^N + \frac{\partial}{\partial t}\left(L\overline{\psi}^N\right)L\psi^N\right)dxd\tau +$$

$$+4i\int_{\Omega_t}\frac{\partial a_1(x,\tau)}{\partial x}\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau + i\int_{\Omega_t} a_1(x,\tau)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(L\psi^N\right)L\overline{\psi}^N + \frac{\partial}{\partial x}\left(L\overline{\psi}^N\right)L\psi^N\right)dxd\tau -$$

$$-i\int_{\Omega_t} a_0\frac{\partial^2 a_1(x,\tau)}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x}L\overline{\psi}^N + \frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial x}L\psi^N\right)dxd\tau -$$

$$-i\int_{\Omega_t}\left(2a(x)\frac{\partial a_1(x,t)}{\partial x} + a_1(x,t)\frac{da(x)}{dx}\right)\left(\psi^N L\overline{\psi}^N + \overline{\psi}^N L\psi^N\right)dxd\tau +$$

$$+2i\int_{\Omega_t} v_1(\tau)\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau = 2i\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(Lf(x,\tau)L\overline{\psi}^N(x,\tau)\right)dxd\tau, \forall t \in [0,T]. \qquad (3.34)$$

Теперь в этом равенстве преобразуем третье слагаемое левой части. Ясно, что имеет место равенство:

$$i\int_{\Omega_t} a_1(x,\tau)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(L\psi^N\right)L\overline{\psi}^N + \frac{\partial}{\partial x}\left(L\overline{\psi}^N\right)L\psi^N\right)dxd\tau = i\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,\tau)\left|L\psi^N\right|^2\right)dxd\tau -$$

$$-i\int_{\Omega_t}\frac{\partial a_1(x,\tau)}{\partial x}\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau\,. \tag{3.35}$$

Если учесть это равенство в левой части равенства (3.34), то оттуда в силу условий $a_1(0,t)=a_1(l,t)=0, t\in(0,T)$ получим справедливость равенства:

$$\int_0^l\left|L\psi^N(x,t)\right|^2 dx-\int_0^l\left|L\psi^N(x,0)\right|^2 dx+$$

$$+3\int_{\Omega_t}\frac{\partial a_1(x,\tau)}{\partial x}\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau-2\int_{\Omega_t}a_0\frac{\partial^2 a_1(x,\tau)}{\partial x^2}\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x}L\bar{\psi}^N\right)dxd\tau-$$

$$-2\int_{\Omega_t}\left(2a(x)\frac{\partial a_1(x,t)}{\partial x}+a_1(x,t)\frac{da(x)}{dx}\right)\operatorname{Re}\left(\psi^N L\bar{\psi}^N\right)dxd\tau+$$

$$+2\int_{\Omega_t}v_1(\tau)\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau=2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(Lf(x,\tau)L\bar{\psi}^N(x,\tau)\right)dxd\tau,\forall t\in[0,T]. \tag{3.36}$$

Используя формулу $L\psi^N(x,0)=\sum_{k=1}^N c_k^N(0)Lu_k(x)$ и условие (3.11) имеем:

$$L\psi^N(x,0)=\sum_{k=1}^N c_k^N(0)Lu_k(x)=\sum_{k=1}^N\varphi_k Lu_k(x)=\sum_{k=1}^N\lambda_k\varphi_k u_k(x). \tag{3.37}$$

С другой стороны можем написать следующее равенство:

$$\sum_{k=1}^N\lambda_k\varphi_k u_k(x)=\sum_{k=1}^N\lambda_k\int_0^l\varphi(\xi)u_k(\xi)d\xi u_k(x)=\sum_{k=1}^N\int_0^l\varphi(\xi)(x)Lu_k(\xi)d\xi u_k(x).$$

С помощью формулы интегрирования по частям имеем:

$$\sum_{k=1}^N\lambda_k\varphi_k u_k(x)=\sum_{k=1}^N\int_0^l L\varphi(\xi)(x)u_k(\xi)d\xi u_k(x).$$

Учитывая это равенство в равенстве (3.37) получим следующее равенство:

$$L\psi^N(x,0)=\sum_{k=1}^N\int_0^l L\varphi(\xi)(x)u_k(\xi)d\xi u_k(x)=\sum_{k=1}^N(L\varphi)_k u_k(x) \tag{3.38}$$

В силу этой формулы нетрудно установить справедливость соотношения:

$$\left\|L\psi^N(\cdot,0)\right\|_{L_2(0,l)}^2=\sum_{k=1}^N\left|(L\varphi)_k\right|^2\le\sum_{k=1}^\infty\left|(L\varphi)_k\right|^2=\|L\varphi\|_{L_2(0,l)}^2.$$

Из этого соотношения и вида оператора L можем установить справедливость неравенства:

$$\left\|L\psi^N(\cdot,0)\right\|_{L_2(0,l)}^2\le c_7\|\varphi\|_{W_2^2(0,l)}^2. \tag{3.39}$$

С учетем этого соотношения из равенства (3.36) можем получить справедливость неравенства:

$$\left\|L\psi^N(\cdot,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2\le c_7\|\varphi\|_{W_2^2(0,l)}^2+$$

$$+3\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial a_1(x,\tau)}{\partial x}\right|\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau+2a_0\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial^2 a_1(x,\tau)}{\partial x^2}\right|\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|\left|L\psi^N\right|dxd\tau+$$

$$+2\int_{\Omega_t}\left(2|a(x)|\left|\frac{\partial a_1(x,t)}{\partial x}\right|+|a_1(x,t)|\left|\frac{da(x)}{dx}\right|\right)\left|\psi^N\right|\left|L\psi^N\right|dxd\tau+$$

$$+2\int_{\Omega_t}|v_1(\tau)|\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau+2\int_{\Omega_t}|Lf(x,\tau)|\left|L\psi^N(x,\tau)\right|dxd\tau,\forall t\in[0,T]. \qquad (3.40)$$

Используя условия на коэффициенты уравнения и применяя неравенство Коши-Буняковского из этого неравенства с помощью оценок (3.17), (3.28) и неравенства:

$$\|Lf\|^2_{L_2(\Omega)}\le c_8\|f\|^2_{W_2^{2,0}(\Omega)} \qquad (3.41)$$

имеем:

$$\left\|L\psi^N(\cdot,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_9\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{2,0}(\Omega)}\right)+c_{10}\int_0^t\left\|L\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau,\forall t\in[0,T].$$

С помощью леммы Гронуолла из этого неравенства получим справедливость оценки:

$$\left\|L\psi^N(\cdot,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_{11}\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{2,0}(\Omega)}\right),\forall t\in[0,T]. \qquad (3.42)$$

Используя формулу для оператора L имеем:

$$\left\|L\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}\ge a_0\left\|\frac{\partial^2\psi^N(.,t)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,l)}-\left\|a(.)\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}.$$

Отсюда получим справедливость неравенства:

$$a_0\left\|\frac{\partial^2\psi^N(.,t)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,l)}\le\left\|L\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}+\mu_1\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}.$$

Из этого неравенства в силу оценок (3.17) и (3.42) имеем:

$$\left\|\frac{\partial^2\psi^N(.,t)}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_{12}\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{2,0}(\Omega)}\right),\forall t\in[0,T]. \qquad (3.43)$$

Суммируя (3.17), (3.28) и (3.43) получим справедливость следующей оценки:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{W_2^2(0,l)}\le c_{13}\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{2,0}(\Omega)}\right),\forall t\in[0,T]. \qquad (3.44)$$

Теперь оценим $\frac{\partial\psi^N}{\partial t}$. С этой целью каждое k-ое уравнение системы (3.10) на свое $\frac{d\bar{c}_k^N(t)}{dt}$ и все полученные равенства просуммируем по $k=1$ до $k=N$. Тогда полученное уравнение интегрируя по интервалу $(0,T)$ имеем:

$$\int_\Omega\left(i\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+a_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}+ia_1(x,t)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}-a(x)\psi^N\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\right)dxdt+$$

$$+\int_{\Omega}\left(v_0(t)\psi^N\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}+iv_1(t)\psi^N\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}\right)dxdt=\int_{\Omega} f\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}dxdt.$$

Отсюда можем написать следующее равенство:

$$\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 dxdt=$$

$$=-i\int_{\Omega}\left(-a_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}-ia_1(x,t)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}+a(x)\psi^N-v_0(t)\psi^N-iv_1(t)\psi^N+f(x,t)\right)\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}dxdt$$

Из этого равенства с помощью неравенства Коши-Буняковского и оценки (3.44) получим справедливость следующей оценки:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\le c_{14}\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{2,0}(\Omega)}\right). \quad (3.45)$$

Интегрируя обе части оценки (3.44) по t по интервалу $(0,T)$ и полученную оценку суммируя с оценкой (3.45) получим следующую оценку:

$$\|\psi^N\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega)}\le c_{15}\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{2,0}(\Omega)}\right), N=1,2,\ldots, \quad (3.46)$$

где $c_{15}>0$ постоянная не зависит от N. Используя эту оценку с выбором $c_0=c_{15}$ нетрудно доказать утверждение леммы. Лемма 3.1 доказана.

Теперь продолжим доказательство теоремы. Благодаря оценке (3.46) из последовательности $\{\psi^N(x,t)\}$ можем выделить под последовательность $\{\psi^{N_m}(x,t)\}$, которая сходится к функции $\psi(x,t)$ слабо в пространстве $W_2^{2,1}(\Omega)$. Покажем, что эта предельная функция $\psi(x,t)$ является решением редуцированной задачи (2.1)-(2.3) в смысле определения 2.1. С этой целью сначала докажем, что эта функция удовлетворяет уравнению (2.1) для почти всех $(x,t)\in\Omega$. Поэтому при $N=N_m$ уравнение из (3.10) умножим на произвольную функцию $\bar{\eta}_k(t)$, где $\bar{\eta}_k(t)$ есть k- й коэффициент Фурье произвольной функции $\bar{\eta}(x,t)$ из пространства $L_2(\Omega)$, то есть $\bar{\eta}_k(t)=(\bar{\eta}(.,t),u_k)_{L_2(0,l)}$. Полученные уравнения складываем по k от $k=1$ до $N'\le N_m$ и результат проинтегрируем в пределах от нуля до T. Тогда получим:

$$\int_{\Omega}\left(i\frac{\partial\psi^{N_m}}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi^{N_m}}{\partial x^2}+a_1(x,t)\frac{\partial\psi^{N_m}}{\partial x}-a(x)\psi^{N_m}+\right.$$

$$\left.+v_0(t)\psi^{N_m}+iv_1(t)\psi^{N_m}-f(x,t)\right)\bar{\eta}^{N'}(x,t)dxdt=0 \quad (3.47)$$

для любой функции $\bar{\eta}_k^{N'}(x,t)=\sum_{k=1}^{N'}\bar{\eta}_k(t)u_k(x)$, $N'\le N_m$. Учитывая слабую сходимость под последовательности $\{\psi^{N_m}(x,t)\}$ к функции $\psi(x,t)$ в пространстве $W_2^{2,1}(\Omega)$ и переходя к пределу по $N_m, m=1,2,...$ в интегральном тождестве (3.47) получим справедливость следующего интегрального тождества:

$$\int_\Omega\left(i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+a_1(x,t)\frac{\partial\psi}{\partial x}-a(x)\psi+v_0(t)\psi+iv_1(t)\psi-f(x,t)\right)\bar{\eta}^{N'}(x,t)dxdt=0$$

для любой функции $\bar{\eta}_k^{N'}(x,t)=\sum_{k=1}^{N'}\bar{\eta}_k(t)u_k(x)$. В виду того, что $\bar{\eta}_k^{N'}(x,t)=\sum_{k=1}^{N'}\bar{\eta}_k(t)u_k(x)$ является частичной суммой ряда $\bar{\eta}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\eta}_k(t)u_k(x)$, при $N'\to\infty$ частичная сумма $\bar{\eta}_k^{N'}(x,t)$ сходится к функции $\bar{\eta}(x,t)$ в $L_2(\Omega)$. Тогда с учетом этого если переходить к пределу в последнем тождестве, то получим того, что предельная функция $\psi(x,t)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int_\Omega\left(i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+a_1(x,t)\frac{\partial\psi}{\partial x}-a(x)\psi+v_0(t)\psi+iv_1(t)\psi-f(x,t)\right)\bar{\eta}(x,t)dxdt=0 \quad (3.48)$$

для любой функции $\eta=\eta(x,t)$ из пространства $L_2(\Omega)$. Отсюда заключаем, что предельная функция $\psi(x,t)$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (2.1) для почти всех $(x,t)\in\Omega$. Теперь покажем, что эта функция $\psi(x,t)$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ удовлетворяет начальному условию (2.2) для почти всех $x\in(0,l)$, то есть условию $\psi(x,0)=\overset{0}{\varphi}(x), \forall x\in(0,l)$. В силу теорем компактного вложения пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ в пространство $C^0([0,T],L_2(0,l))$ можем написать следующее соотношение:

$$\left\|\psi^{N_m}(.,t)-\psi(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}\to 0 \quad (3.49)$$

равномерно относительно $t\in[0,T]$ при $m\to\infty$. Кроме того, можем написать следующее неравенство:

$$\left\|\psi(.,0)-\varphi\right\|_{L_2(0,l)}\le\left\|\psi(.,0)-\psi^{N_m}(.,0)\right\|_{L_2(0,l)}+\left\|\psi^{N_m}(.,0)-\varphi\right\|_{L_2(0,l)}. \quad (3.50)$$

Используя предельное соотношение (3.49) при $t=0$ получаем, что первое слагаемое в правой части этого неравенства при $m\to\infty$ стремится к нулю. Поэтому покажем, что и второе слагаемое в правой части этого неравенства при $m\to\infty$ также стремится к нулю. Используя формулу (3.9) имеем:

$$\psi^{N_m}(x,0)=\sum_{k=1}^{N_m}c_k^{N_m}(0)u_k(x)=\sum_{k=1}^{N_m}\varphi_k u_k(x)=\varphi^{N_m}(x).$$

Ввиду того, что $\varphi^{N_m}(x)$ является частичной суммой ряда Фурье для функции $\varphi=\varphi(x)$ из пространства $W_2^2(0,l)$, удовлетворяющей условиям $\frac{d\varphi(0)}{dx}=\frac{d\varphi(l)}{dx}=0$. С учетом этого если переходить к пределу во втором слагаемом правой части неравенства (3.50), то при $m\to\infty$получим, что оно стремится к нулю, то есть имеет место предельное соотношение:

$$\left\|\psi^{N_m}(.,0)-\varphi\right\|_{L_2(0,l)}\to 0 \text{ при } m\to\infty. \qquad (3.51)$$

Таким образом, с учетом этого предельного соотношения и предельного соотношения (3.49) при $t=0$ если переходить к пределу в обеих частях неравенства (3.50), то при $m\to\infty$ получим справедливость соотношения:

$$\left\|\psi(.,0)-\varphi\right\|_{L_2(0,l)}=0.$$

Из этого соотношения получаем, что предельная функция $\psi(x,t)$ удовлетворяет условию начальному условию из (2.2), то есть $\psi(x,0)=\varphi(x),\forall x\in\overset{0}{(0,l)}$. Наконец, докажем, что предельная функция $\psi(x,t)$ удовлетворяет краевым условиям (2.3). Известно из работы [12], что для элементов под последовательности $\{\psi^{N_m}(x,t)\}$ в силу теоремы о следах имеет место соотношения:

$$\frac{\partial\psi^{N_m}(0,.)}{\partial x},\frac{\partial\psi^{N_m}(l,.)}{\partial x}\in L_2(0,T),m=1,2,\dots. \qquad (3.52)$$

В силу свойства сходимости под последовательности $\{\psi^{N_m}(x,t)\}$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ получим справедливость предельных соотношений: при $m\to\infty$

$$\frac{\partial\psi^{N_b}(0,.)}{\partial x}\to\frac{\partial\psi(0,.)}{\partial x} \text{ слабо в } L_2(0,T), \qquad (3.53)$$

$$\frac{\partial\psi^{N_b}(l,.)}{\partial x}\to\frac{\partial\psi(l,.)}{\partial x} \text{ слабо в } L_2(0,T). \qquad (3.54)$$

С другой стороны, для элементов под последовательности $\{\psi^{N_m}(x,t)\}$ имеет место следующие равенства

$$\frac{\partial\psi^{N_m}(s,t)}{\partial x}=\sum_{k=1}^{N_m}c_k^{N_m}(t)\frac{du_k(s)}{dx},s=0,l\ .$$

Из этих равенств в силу условий $\frac{du_k(0)}{dx}=\frac{du_k(l)}{dx}=0$ получим справедливость следующих соотношений:

$$\frac{\partial\psi^{N_b}(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\psi^{N_b}(l,t)}{\partial x}=0 \qquad (3.55)$$

Для $\forall \eta \in L_2(0,T)$ можем написать следующие равенства:

$$\int_0^T \frac{\partial \psi(s,t)}{\partial x} \overline{\eta}(t) dt = \int_0^T \left(\frac{\partial \psi(s,t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{N_p}(s,t)}{\partial x} \right) \overline{\eta}(t) dt + \int_0^T \frac{\partial \psi^{N_p}(s,t)}{\partial x} \overline{\eta}(t) dt, s = 0, l. \quad (3.56)$$

Тогда с учетом соотношений (3.56) и предельных соотношений (3.53), (3.54) если переходить к пределу в обеих частях равенств (3.51), то оттуда при $m \to \infty$ для любой функции $\eta \in L_2(0,T)$ получим справедливость соотношений:

$$\int_0^T \frac{\partial \psi(s,t)}{\partial x} \overline{\eta}(t) dt = 0, s = 0, l.$$

Из этих соотношений получим, что предельная функция $\psi(x,t)$ удовлетворяет краевым условиям (2.3) для почти всех $t \in (0,T)$, то есть имеет место:

$$\frac{\partial \psi(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(l,t)}{\partial x} = 0, \overset{0}{\forall} t \in (0,T).$$

Таким образом, нами доказано, что предельная функция $\psi(x,t)$ является решением начально-краевой задачи (2.1)-(2.3) и это решение принадлежит пространству $W_2^{2,1}(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка (3.1), которая непосредственно следует из оценки (3.12) после перехода к нижнему пределу по слабо сходящейся под последовательности $\{\psi^{N_m}(x,t)\}$ из $W_2^{2,1}(\Omega)$ к функции $\psi(x,t)$. Непосредственно из оценки (3.1) следует единственность решения начально-краевой задачи (2.1)-(2.3). Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Аналогично доказывается теорема о существовании и единственности решения первой начально-краевой задачи для линейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда вещественные и мнимые части комплексного потенциала являются измеримыми ограниченными функциями, зависящими только от временной переменной, из пространства $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$.

Литература

1. Akbaba, G.D. (2011). The optimal control problem with the Lions functional for the Schrödinger equation including virtual coefficient gradient. *Master's thesis, Kars,* 71 pp. (in Turkish).
2. Алексеев, В.М., Тихомиров, В.М., Фомин, С.В. (1979). *Оптимальное управление.* М: Наука, 430 с.
3. Васильев, Ф.П. (1980). *Численные методы решения экстремальных задач.* М: Наука, 518 с.

4. Воронцов, М.А., Шмальгаузен, В.И. (1985). *Принципы адаптивной оптики.* М.: Наука, 366 с.
5. Журавлев В.М. (2001). *Нелинейные волны в много компонентных системах с дисперсией и диффузией.* Ульяновск, УлГУ, 200 с.
6. Искендеров, А., Ягуб, Г., Салманов В. (2018). Разрешимость начально-краевой задачи для нелинейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с комплексным потенциалом. *Научные труды Нахичеванского Государственного Университета, Серия физико-математических и технических наук,* № 4 (93), с. 28-43.
7. Искендеров, А., Ягубов, Г. (2007). Оптимальное управление неограниченным потенциалом в многомерном нелинейном нестационарном уравнении Шредингера. *Вестник Ленкоранского гос. ун-та. Сер. Естественных наук, Ленкорань,* с. 3-56.
8. Искендеров, А.Д., Ягубов, Г.Я. (1988). Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантовомеханического потенциала. *Докл. АН СССР,* 303(5), с. 1044-1048.
9. Искендеров, А.Д., Ягубов, Г.Я. (1989). Оптимальное управление нелинейными квантово-механическими системами. *Автоматика и телемехан.* № 12, с. 27-38.
10. Искендеров, А.Д., Ягубов, Г.Я., Мусаева, М.А. (2012). *Идентификация квантовых потенциалов.* Баку, Чашыоглу, 548 с.
11. Ладыженская, О.А. (1973). Краевые задачи математической физики. М: Наука, 408 с.
12. Ладыженская, О.А., Солонников, В.А., Уральцева, Н.Н. (1967). *Линейные иквазилинейные уравнения параболического типа.* М: Наука, 736 с.
13. Ландау Л.Д., Лифщиц Е.М. (1963). Квантовая механика. Нерельявистская теория. М.: Физматгиз, т. 3, 702 с.
14. Понтрягин Л.С. (1982). Обыкновенные дифференциальные уравнения. М: Наука, 332 с.
15. Ягубов, Г., Салманов, В., Ягубов, В., Зенгин, М. (2017). Разрешимость начально-краевых задач для нелинейного двумерного уравнения Шредингера. *Научные труды Нахичеванского Государственного Университета, Серия физико-математических и технических наук.* № 4 (85), с. 7-21.
16. Ягубов, Г.Я., Мусаева, М.А. (1997). Об одной задаче идентификации для нелинейного уравнения Шредингера. *Дифференц. уравнения*, т. 33, № 12, с. 1691-1698.

17. Ibragimov, N.S. (2010). Solvability of initial-boundary value problems for a linear stationary equation of quasi-optics. *International Journal of Caucasian University "Mathematics and Informatics"*. Vol.1, № 29, pp. 61-70. (in Russian).
18. Ibragimov, N.S. (2010). Solvability of initial-boundary value problems for a multidimensional nonlinear stationary quasi-optics equation with a purely imaginary coefficient in the nonlinear part. *News of Baku State University, Ser. Phys. Math. Sciences*. No.3, pp.72-84. (in Russian).
19. Lions, J-L., Magenes, E. (1972). Non-homogeneous boundary value problems and applications - vol. 2. Berlin, 307 p.
20. Yagub, G., İbrahimov N.S., Zengin M. (2018). The solvability of the initial-boundary value problems for a nonlinear Schrodinger equation with a special gradient term. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, № 2, pp. 214-232.
21. Yagub, G., Ibrahimov, N.S., Zengin, M. (2021). Solvability of the initial-boundary value problems for the nonlinear Schrödinger equation with a spesial gradient terms. *Abstracts of the XXV International Conference Problemsof Decision Making under Uncertainties (PDMU-2015).* Skhidnytsia,Ukraine, May 11-15, pp.53-54.
22. Yagub, G., İbrahimov, N.S., Aksoy, N.Y. (2016). On the initial-boundary value problems for the nonlinear Schrödinger equation with spesial gradient terms. *Abstracts of the XXVII International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2016).* Tbilisi-Batumi, Georgia, May 23-27, pp.170-171.
23. Yagubov, G., Toyoğlu, F., Subaşı, M. (2012). An optimal control problem for two-dimensional Schrödinger equation. *Applied Mathematics and Computation*. vol. 218, iss.11, pp.6177-6187.
24. Yakub, G., Ibrahimov, N.S., Zengin, M. (2021). Optimal control problem for the stationary quasi-optics equation with a special gradient term. *Advanced Mathematical Models and Applications.* Vol. 6, № 3, pp. 252-265.
25. Zengin, M., İbrahimov, N.S., Yagub G. (2021). Existence and uniqueness of the solution of the optimal control problem with boundary functional for nonlinear stationary quasi-optical equation with a special gradient term. *Scientific Proceedings Lankaran State University, Mathematical and Naturl sciences series*. № 1, pp. 27-42 .

XÜSUSİ QRADİYENT TOPLANANLI VƏ ZAMANDAN ASILI OLAN ÖLÇÜLƏBİLƏN MƏHDUD KOMPLEKS POTENSİALLI ŞREDİNGER TƏNLİYİ ÜÇÜN İKİNCİ BAŞLANĞIC SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

Qabil Yaqub
Natiq İbrahimov
Nizami Süleymanov
Kafkas Universiteti, Qars, Türkiyə
Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan
Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan

Biz bu məqalədə xüsusi qradiyentli toplanana malik və yalnız zamandan asılı olan ölçülə bilən məhdud kompleks potensiallı xətti birölçülü qeyri-stasionar Şredinger tənliyi üçün ikinci başlanğıc-sərhəd məsələsini nəzərdən keçiririk. Eyni zamanda Qalerkin üsulundan istifadə etməklə baxılan ikinci başlanğıc sərhəd məsələsinin həllinin mövcudluğu və yeganəliyi haqqında teorem isbat edilir.
Açar sözlər: Şredinger tənliyi, qradiyentli toplanan, kompleks potensiallı, Qalerkin üsulu.

Gabil Yagub
Natig Ibragimov
Nizami Suleymanov
Kafkas University, Kars, Turkey
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan
Baku State University, Baku, Azerbaijan

In this paper, we consider the second initial-boundary value problem for a linear one-dimensional unsteady Schrodinger equation with a special gradient term and with a measurable limited complex potential that depends only on time. At the same time, using the Galerkin method, the theorem on the existence and uniqueness of the solution of the second initial boundary value problem under consideration is proved.
Key words: Schrodinger equation, gradient term, complex potential, Galerkin method.

Daxil oldu: 01.03.2022; Çapa qəbul edildi: 30.05.2022; Çap edildi: 20.06.2022